



*Кондратьев Александр Сергеевич,
Ляпцев Александр Викторович*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Аннотация

Обсуждается соотношение между аналитическими и вычислительными методами исследования математических моделей нелинейной динамики.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейная динамика, иерархия моделей, вычислительный эксперимент.

Математическое моделирование выступает в настоящее время как новый универсальный компонент методологии любой науки [1, 2]. Математическое моделирование не отвергает, а дополняет традиционные классические методы исследования, позволяя получать надежное, хотя и эмпирическое знание по интересующей проблеме за более короткое время и менее дорогостоящим образом, чем при использовании классических методов. Математическое моделирование определяет общую перспективу экспериментального исследования явления или процесса. Идя рука об руку с натурными экспериментами, оно способствует правильной интерпретации тончайших опытов, уточнению результатов измерений и позволяет наиболее эффективно определять направление последующих исследований. В ряде случаев оно позволяет получить информацию об объектах и процессах, вообще недоступных для исследования методами натурального эксперимента.

По современным представлениям, математическое моделирование – незаменимый инструмент нового мышления во все

усложняющемся мире, своего рода «интеллектуальное ядро» информационных технологий в условиях лавинообразного роста получаемой информации, позволяющее оформить этот поток в стройные научные системы.

Математические методы исследований в физике как инструмент исследования, стали применяться одновременно со становлением физики. Более того, развитие физики и, в частности, механики стимулировало развитие различных разделов математики, в частности, интегрального и дифференциального исчисления. Развитие математики включало в себя и развитие численных методов исследований. Существенный качественный прорыв в применении численных методов произошел с появлением компьютеров. Появилась возможность применять математическое моделирование для задач, решение которых в обозримое для человека время было невозможно. Математическое моделирование с использованием компьютера стали называть *компьютерным моделированием*. Синонимами этого понятия стали также термины: *численный эксперимент* и *вычислительный эксперимент*.

© А.С. Кондратьев, А.В. Ляпцев, 2010

В отличие от реального (натурного) эксперимента вычислительный эксперимент исследует не реальный объект, а его математическую модель. Однако между натурным экспериментом и вычислительным экспериментом имеется много общего [3, 4]. В частности, само понятие эксперимент является достаточно общим. Любые измерения, отвечающие научным методам, например, измерение электрического сопротивления конкретного образца стандартными приборами, можно назвать экспериментом. Точно также любые вычисления, относящиеся к модели реального объекта, например вычисление момента инерции конкретного тела стандартными методами, можно назвать вычислительным экспериментом.

Однако в научных исследованиях под экспериментом, как правило, понимают измерения и наблюдения, выявляющие качественно новые свойства объекта или явления. Такие исследования требуют проведения эксперимента с исследованием нескольких характеристик при варьировании нескольких различных параметров, описывающих объект. Точно так же под вычислительным экспериментом, имеющим отношение к научным исследованиям, следует понимать процесс построения математической модели объекта или явления и исследование ряда свойств этой модели при варьировании различных параметров, описывающих модель, посредством проведения вычислений. Такого рода вычисления приводят, как и в натурном эксперименте, к выявлению новых качественных свойств модели, которые затем могут быть проверены для соответствующего объекта или явления (см. [1–4]). Все, о чем говорится далее, относится именно к подобному вычислительному эксперименту.

Проведение вычислительного эксперимента можно разбить на несколько этапов. Например, А.А. Самарский выделяет следующие этапы [3]:

- 1) построение математической модели,
- 2) составление разностной схемы (уравнений),
- 3) программирование,

4) расчеты на компьютере,

5) сравнение результатов расчета и уточнение модели.

Заметим, что за прошедшие после публикации статьи [3] 30 лет этапы вычислительного эксперимента практически не изменились, за исключением того, что компьютер физически приблизился к программисту и этапы 3 и 4 часто сливаются в один этап.

Анализируя процесс проведения вычислительного эксперимента, несложно придти к выводу, что он имеет междисциплинарный характер. При построении модели и анализе результатов необходим специалист науки, изучающей данный объект или явление (физик, биолог и т. д.). Далее необходимо участие математика, способного создать методику приближенного вычисления и оценки влияния сделанного приближения на получаемые результаты. Наконец, необходим программист, способный создать алгоритм, реализующий приближенный численный расчет, и записать этот алгоритм на том или ином языке программирования. Соответственно подготовка специалистов, связанных с математическим моделированием, – это подготовка исследователей в той или иной области научных исследований (физиков, биологов и т. д.) и подготовка математиков и программистов. Как правило, говоря об обучении математическому моделированию, имеют в виду обучение прикладной математике и программированию.

Заметим, что масштабы реального (натурного) эксперимента в современной науке могут быть различными. Наряду с глобальными экспериментами, примером которых может служить Большой адронный коллайдер, собравший тысячи ученых из десятков стран, существуют эксперименты, проводимые небольшими группами ученых. Соответственно, различные масштабы могут быть и у вычислительных экспериментов. Если в процессе экспериментальных исследований, проводимых небольшой группой ученых, возникает необходимость проведения численного эксперимента для исследования модели,

объясняющей новые качественные экспериментальные результаты, то возникает естественный вопрос: стоит ли подключать специалистов, математиков и программистов или можно попробовать обойтись «своими силами».

Выбор второго варианта может оказаться целесообразным в силу нескольких причин. Во-первых, часто для численного исследования достаточно не создавать принципиально новую математическую модель, а внести некоторые коррективы в уже существующую модель. Например, часто физические и биологические процессы моделируются системами балансных уравнений (см. [1, 2]), и для объяснения нового качественного эффекта может оказаться достаточным добавить дополнительные члены в эту систему. Во-вторых, экспоненциальный рост мощности компьютеров привел к соответствующему росту программного обеспечения, в результате чего были разработаны интегрированные вычислительные среды, значительно упрощающие проведение этапов, связанных с разработкой алгоритмов численного решения задачи и программирования. Большинство интегрированных сред, например, такие как Mathcad, Mathematica, Matlab, Maple, Derive, содержат встроенные процедуры, реализующие наиболее часто встречающиеся численные методы, включая такие сложные методы, как численное решение дифференциальных уравнений в частных производных. Используя стандартные процедуры этих сред можно выводить разнообразную графическую информацию, касающуюся полученных результатов, включая анимацию различных временных процессов.

Использование встроенных процедур значительно упрощает этапы вычислительного эксперимента, относящиеся к разработке алгоритма, программирования и тестирования программы. По сути, вместо досконального изучения численных методов и создания алгоритмов, реализующих их, требуется научиться грамотно обращаться к соответствующей процедуре, что является, несомненно, более про-

стой задачей. Проводя аналогию с реальным экспериментом, можно сказать, что от исследователя требуется не заново конструировать свой прибор из различных деталей, а научиться пользоваться уже готовым прибором, предназначенным для данных исследований. Конечно же, для проведения уникальных экспериментов требуется создание новых приборов, однако во многих исследованиях целесообразно использовать уже имеющееся надежное и апробированное оборудование.

Важной особенностью вычислительных сред является использование языка программирования более высокого уровня, чем традиционно изучаемые языки (Паскаль, СИ и др.) Так, например, в среде Matlab реализован язык программирования сверхвысокого уровня, ориентированный на работу с матрицами. Программирование на таком языке, с одной стороны, сокращает объем программы и, соответственно, временные затраты по ее созданию в той же пропорции, как переход с языка программирования низкого уровня (Ассемблер) на язык программирования высокого уровня (Паскаль, СИ), а с другой стороны, не является принципиально более сложным, чем программирование на языках высокого уровня. Поскольку программирование на языках высокого уровня входит в школьную программу по информатике, освоение программирования в вычислительных средах вполне доступно студентам технических и естественнонаучных специальностей вузов.

Наконец, еще одним достоинством вычислительных сред является удобный интерфейс, предоставляемый пользователю. Более того, некоторые среды позволяют пользователю самому конструировать удобный ему интерфейс. Примером является визуальная среда *guide*, предназначенная для написания приложений с графическим интерфейсом пользователя в пакете Matlab. Созданная в этой среде программа представляет собой окно, в котором пользователь размещает необходимые ему элементы (переключатели, области ввода данных, пользовательские меню,

области графиков и т. д.) Проведение вычислительного эксперимента в этом случае становится удобным и эффективным, а результаты эксперимента легко включаются в отчет или в статью. Несмотря на то, что при использовании среды guide фактически проводится объектно-ориентированное программирование, освоение процесса программирования достаточно просто. Пользователь должен разместить в создаваемом окне ряд элементов (кнопки, переключатели, полосы скроллинга, области размещения графиков и т. д.), наделять эти элементы необходимыми свойствами и затем в автоматически создаваемом шаблоне написать процедуры обработки обращения к этим элементам. Опыт показывает, что студенты достаточно легко овладевают необходимыми навыками.

Все вышесказанное позволяет сделать вывод о том, что в процессе подготовки специалиста, проводящего исследования в той или иной области естественных или прикладных наук, возможно и необходимо обучить его основам самостоятельного проведения вычислительного эксперимента. Немаловажным при этом является выбор задач, на примере которых проводится обучение. Задачи, естественно, должны быть ориентированы на область научных исследований, для работы в которой осуществляется подготовка специалиста. В частности, для будущих физиков и инженеров – это задачи по физике. С одной стороны, задачи должны быть достаточно простыми, чтобы первый этап – построение математической модели – можно было бы осуществить уже после освоения общего курса физики. С другой стороны, задачи должны быть такими, чтобы иллюстрировать понятие вычислительного эксперимента, то есть для их решения действительно необходимо было использовать численные методы и была возможность исследовать новые качественные особенности рассматриваемой модели при варьировании различных параметров. Примеры таких задач были опубликованы в журнале «Компьютерные инструменты в образовании» [5–8], а также включены в учебное пособие [9].

Среди разнообразных задач можно выделить задачи из области нелинейной динамики, например вынужденные колебания нелинейного осциллятора [5]. Даже для простейших таких задач, несмотря на простоту исходной модели, аналитические решения могут быть получены лишь в некотором приближении или в частных случаях. Особенности, связанные с нелинейностью, могут быть получены только при исследовании качественной зависимости решений от исходных параметров, что требует варьирования этих параметров и роднит процесс расчета с натурным экспериментом. Наконец, как будет показано далее, численные решения в некоторых случаях оказываются, несмотря на неизбежные сделанные при расчетах приближения, ближе к реальности, чем аналитические решения, которые можно получить в ряде случаев. Ниже мы приведем два примера таких задач, различных по постановке и используемым для решения алгоритмам, но дающих – и не случайно – качественно одинаковые особенности решений.

РОТАТОР ВО ВНЕШНЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим электрический диполь, способный совершать вращение вокруг фиксированной в пространстве оси (рис. 1). На рисунке ось вращения проходит через середину диполя и направлена перпендикулярно плоскости рисунка.

Пусть на диполь действует переменное электрическое поле, напряженность которого направлена вдоль оси x . Задача состоит в исследовании движения такого диполя.

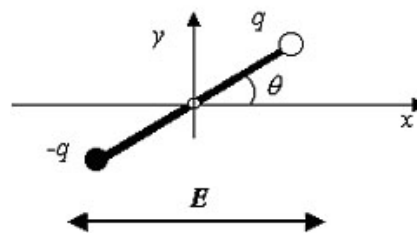


Рис. 1

Момент сил, обусловленный воздействием электрического поля, имеет вид: $N = d \times E(t)$, где d – вектор дипольного момента, E – напряженность электрического поля. Рассматривая вращение диполя в рамках классической динамики, уравнение движения можно представить в виде:

$$I\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} = F(t) \sin\theta \quad (1).$$

В этом уравнении I – момент инерции диполя относительно оси вращения, $F(t) = E(t)d$. Коэффициент α характеризует момент сил вязкого трения. Природа этих сил может быть различной. Наряду с обычными силами трения, подобным образом могут быть учтены потери энергии на излучение диполя.

Будем далее считать, что внешнее поле изменяется по гармоническому закону:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t).$$

Тогда уравнение движения записывается в виде:

$$I\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} = F_0 \sin\theta \cos(\omega t), \quad (2)$$

где ω – частота внешнего поля, $F_0 = E_0 d$, E_0 – амплитуда внешнего поля.

Уравнение (2) является нелинейным дифференциальным уравнением и в общем случае может быть решено лишь численными методами. Для численного решения удобно преобразовать уравнение, уменьшив число параметров:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} = f \sin\theta \cos t, \quad (3)$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha}{I\omega}, \quad f = \frac{F_0}{I\omega^2}. \quad (4)$$

Как многие нелинейные уравнения, уравнение (3) сводится к линейному уравнению в предельном случае, когда угол θ изменяется в некотором небольшом интервале вблизи значения $\pi/2$ или $-\pi/2$. Пусть значение угла θ изменяется вблизи значения, равного $\pi/2$. Тогда, вводя переменную $u = \theta - \pi/2$, найдем:

$$\sin\theta = \cos u \approx 1 - u^2/2.$$

Пренебрегая вторым порядком малости величины u , вместо (3) получим уравнение:

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} = f \cos t. \quad (5)$$

Если θ изменяется вблизи значения, равного $-\pi/2$, то уравнение (3) сведется к уравнению:

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} = -f \cos t,$$

которое совпадает с уравнением (5) при изменении начала отсчета времени на половину периода колебаний внешнего поля.

Уравнение (5) – это обычное уравнение вынужденных гармонических колебаний с собственной частотой $\omega_0 = 0$. Поэтому его установившееся решение имеет вид:

$$u(t) = A \cos(t + \varphi),$$

где амплитуда A и фаза φ определяются амплитудой вынуждающей силы и коэффициентом затухания. В данном случае, если начальные условия таковы, что $\theta(0)$ близко к значению $\pi/2$ или $-\pi/2$, а начальное значение угловой скорости мало, уравнение (3) описывает вынужденные гармонические колебания с амплитудой:

$$A = \frac{f}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad \text{tg}\varphi = \gamma.$$

Очевидно, что гармоническое решение существует при малых амплитудах, то есть либо при $\gamma \gg 1$ и $f \ll \gamma$, либо при $f \ll 1$.

При произвольных значениях параметров γ и f решения уравнения (3) могут быть получены лишь численными методами, за исключением тривиальных решений при начальных условиях $\sin(\theta(0)) = 0$ и $\dot{\theta}(0) = 0$. При использовании вычислительных сред, например Matlab, можно воспользоваться процедурами решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Для проведения численного эксперимента удобно также воспользоваться средствами графического интерфейса пользователя, позволяющего достаточно простыми средствами создавать графическое окно, в котором и проводится дальнейший эксперимент.

Интересные качественные особенности решений получаются, если считать затухание малым ($\gamma \ll 1$) и варьировать параметр f . А именно, численное решение уравнения (3) приводит к следующим закономерностям.

1. Существуют значения параметра f , при которых при любых начальных условиях после истечения определенного времени решение становится периодическим. Период решения в большинстве случаев совпадает с периодом вынуждающего воздействия, однако может быть и кратен ему (наблюдались кратности до 6 периодов вынуждающего воздействия).

2. Периодические решения могут быть как чисто колебательными (среднее значение угла θ не изменяется со временем), так и вращением с наложенными на него колебаниями. В последнем случае значение угловой скорости, усредненное по периоду, остается неизменным. На рис. 2 и 3 приведены графики, иллюстрирующие вышесказанное. Слева изображены графики зависимости угла и угловой скорости от времени. На верхнем графике значения угла даны в единицах 2π , то есть в числе оборотов. На нижнем графике значения угловой скорости приведены в c^{-1} . Средний график соответствует внешнему воздействию. Справа приведена фазовая диаграмма, на которой по горизонтальной оси отложено значение $\sin \theta$, а по вертикальной – значения $\dot{\theta} \cos \theta$.

Решение, приведенное на рис. 2, соответствует колебаниям при $f = 7.3$. Период колебаний в 6 раз больше периода вынуждающего воздействия. Фазовая диаграмма представляет собой 12 наложенных друг на друга петель. Решение, приведенное на рис. 3, соответствует вращению с наложенными колебаниями при $f = 31.4$. Кратность периода в этом

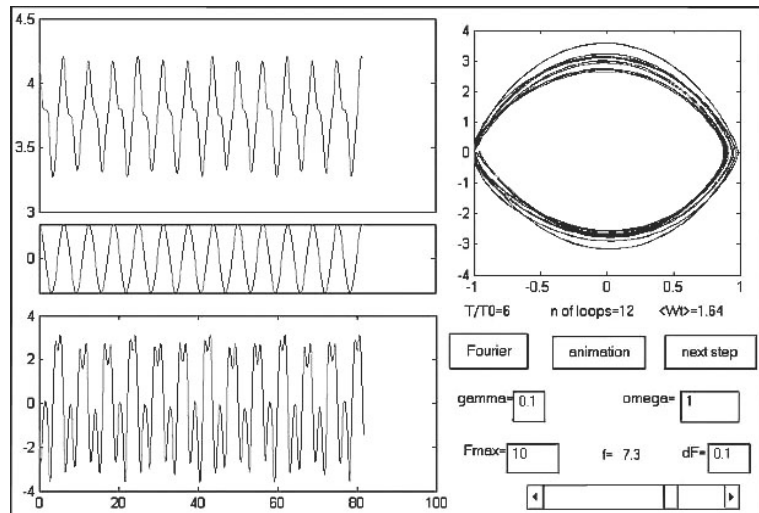


Рис. 2

случае равна 3, а фазовая диаграмма также представляет собой 12 наложенных петель.

3. При некоторых значениях параметра f при любых начальных условиях решение является непериодической функцией, и реализуется динамический хаос. Следует отметить, что, как и возможности натурального эксперимента, возможности численного эксперимента ограничены. Естественно, проверялись несколько наборов начальных условий и время, на протяжении которого вычислялась функция $\theta(t)$ было ограничено (порядка сотни периодов вынуждающего воздействия).

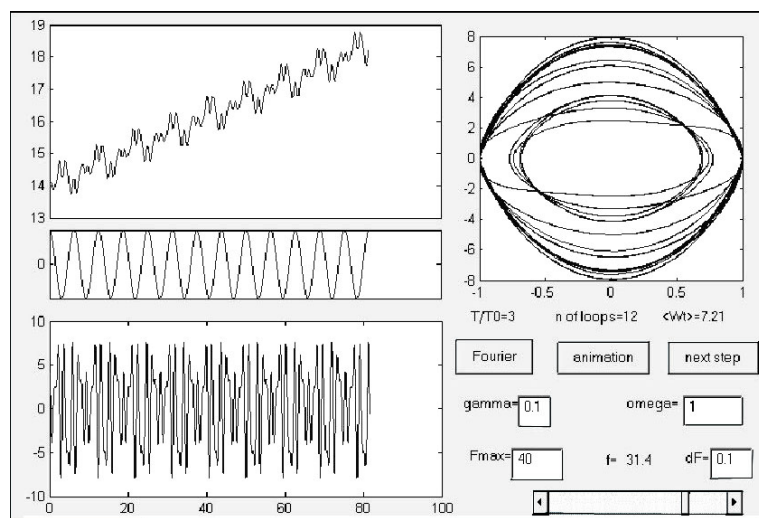


Рис. 3

4. Существует определенная регулярность расположения значений f , соответствующих различным видам решений. Именно, можно выделить интервалы значений f , такие, что при любых значениях, лежащих внутри интервала, характер решения (хаос, вращение, колебание) остается неизменным. Будем для краткости называть такие интервалы зонами. Будем называть зонами хаоса такие, для которых имеют место хаотические решения, вращательными зонами – такие, для которых решения соответствуют установившемуся вращению (рис. 3), и колебательными зонами – такие, для которых решения имеют характер установившихся колебаний (рис. 2).

О расположении зон можно судить по схеме, изображенной на рис. 4. По горизонтальной оси отложено значение f . Нулевые значения по вертикали соответствуют значениям f , для которых имеют место хаотические решения.

Для удобства будем условно считать, что положительные значения по вертикали соответствуют колебательным решениям, а именно равны кратностям периода колебаний в отношении к периоду вынуждающего воздействия. Отрицательные значения по вертикали соответствуют вращательным решениям, при этом модуль значения по вертикали также характеризует кратность периода.

Рис. 4 наглядно демонстрирует такую «зонную структуру». При этом для небольших значений f структура имеет хаотич-

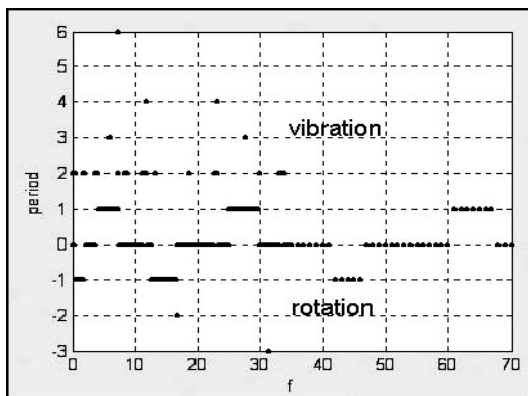


Рис. 4

ный вид, внутри запрещенных зон имеются отдельные точки, соответствующие колебательным и вращательным решениям. При больших значениях f структура становится более регулярной.

5. Из рис. 4 видно, что колебательные и вращательные зоны чередуются, причем между каждой парой колебательная зона – вращательная зона имеется зона хаоса.

ЧАСТИЦА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА, НАХОДЯЩАЯСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Рассмотрим теперь модель, представляющую собой частицу, совершающую одномерное движение в области пространства, ограниченной стенками. Будем считать, что при столкновении со стенкой частица испытывает упругое отражение, причем время, за которое происходит отражение, пренебрежимо мало. Считаем, что в пространстве между стенками на частицу действует сила, изменяющаяся по гармоническому закону со временем, а также сила вязкого трения, тормозящая движение и пропорциональная скорости. Реальным объектом, соответствующим этой модели, может быть, например, мяч, катающийся по каюте корабля, испытывающего качку.

Уравнение движения для частицы имеет вид:

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + f \cos(\Omega t + \varphi),$$

где x – координата частицы, точки обозначают производные по времени, γ – коэффициент пропорциональности между силой вязкого трения и скоростью частицы, f – амплитуда внешней силы, Ω – частота периодической силы, φ – начальная фаза. Это уравнение можно преобразовать к виду:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} = \frac{f}{m} \cos(\Omega t + \varphi).$$

Коэффициент m/γ имеет размерность времени. Для проведения вычислений удобно провести масштабное преобразование времени, так чтобы принять эту величину за единицу, то есть ввести безразмерную переменную времени:

$$t' = \frac{\gamma}{m} t.$$

Физический смысл единицы времени t' – за это время скорость частицы уменьшается в e раз в отсутствие периодической силы ($f = 0$).

В новых переменных уравнение движения частицы принимает вид:

$$\ddot{x} + \dot{x} = F \cos(\omega t' + \varphi), \quad (6)$$

где точки обозначают производные по t' , F и ω – амплитуда и частота силы в новых переменных:

$$F = \frac{fm}{\gamma^2}, \quad \omega = \frac{\gamma}{m} \Omega.$$

Без потери общности можно считать, что движение частицы ограничено координатами $x = 0$ и $x = l$. Удобно сделать масштабное преобразование длины, приняв за единицу длины l , так что движение частицы будет ограничено координатами $x = 0$ и $x = 1$. Амплитуда силы F , которая имеет размерность длины, будет, таким образом, измеряться в единицах l .

Уравнение (6) описывает движение частицы между столкновениями со стенками (если столкновения имеют место). Решение этого уравнения на промежутке между столкновениями при заданных начальных условиях:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ \dot{x}(t_0) &= v_0 \end{aligned} \quad (7)$$

может быть получено в аналитическом виде

$$x(t) = x_0 + (v_0 + A\omega \sin(\omega t_0 + \psi))(1 - e^{-t'}) + A(\cos(\omega t + \psi) - \cos(\omega t_0 + \psi)), \quad (8)$$

где

$$A = \frac{F}{\omega \sqrt{1 + \omega^2}}, \quad (9)$$

а угол ψ однозначно (с точностью до аддитивной постоянной $2\pi n$) определяется соотношениями:

$$\cos \psi = -\frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad \sin \psi = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}.$$

Несложно понять физический смысл величин A и ψ – в отсутствие столкновений со стенками они представляют собой амплитуду и фазу вынужденного установившегося колебания.

Полное решение уравнения получается сшиванием решений, описывающих движение между столкновениями. Алгоритм построения решения достаточно простой. Из уравнения (8) находится очередной момент времени t_n , при котором координата x_n обращается в 0 или 1. Подставляя значение t_n в производную от правой части уравнения (8), находим скорость в этот момент времени v_n . Начальными условиями решения на очередном временном промежутке являются следующие условия:

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= x_n, \\ \dot{x}(t_{n+1}) &= -v_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Процессы столкновений со стенками приводят к тому, что получить общее решение уравнения в аналитическом виде не удастся (невозможно получить аналитическое выражение для времени очередного столкновения). Численное решение показывает, что решение обладает многими свойствами нелинейных уравнений – критичной зависимостью от начальных условий, наличием бифуркаций при адиабатически медленном изменении параметров и сменой характеров решений (периодические и хаотические решения) (см., например, [10]). Исследование этих качественных особенностей, по сути дела, и представляет собой учебный вычислительный эксперимент. Далее мы приведем лишь некоторые результаты, иллюстрирующие этот эксперимент.

Начнем эксперимент с начальных условий $t_0 = 0$, $x_0 = 0,5$ и $v_0 = 0$. Значение F фиксируем равным 5, а значение ω будем плавно уменьшать со значения 5. Довольно быстро устанавливается режим вынужденного гармонического колебания, при котором частица не сталкивается со стенками (рис. 5). На рисунке приведено окно, которое сконструировано в среде Guide и с помощью которого удобно проводить вычислительный эксперимент. В левой части окна приведены графики зависимости координаты (верхний) и скорости (нижний) от времени, а также зависимость вынуждающей силы от времени. В правой части окна приведена фазовая диаграмма.

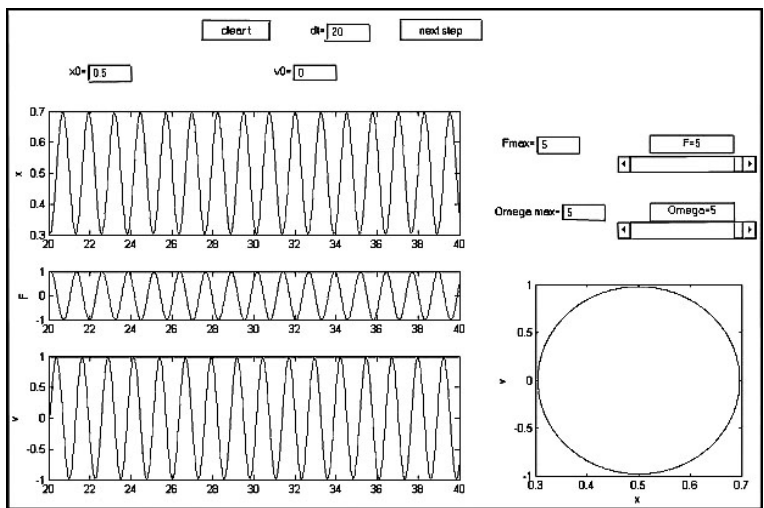


Рис. 5

При уменьшении значения ω вначале адиабатически медленно увеличивается амплитуда вынужденных колебаний в соответствии с формулой (9). Когда в результате этого процесса амплитуда увеличится настолько, что частица столкнется со стенкой, характер решения резко изменяется. Это скачкообразное изменение происходит в интервале частот от 3 до 5 в зависимости от того, насколько медленно изменяется частота. Спустя некоторое время после скачка, устанавливается периодическое решение, приведенное на рис. 6. Как видно из рисунка, решение является симметричным относительно сте-

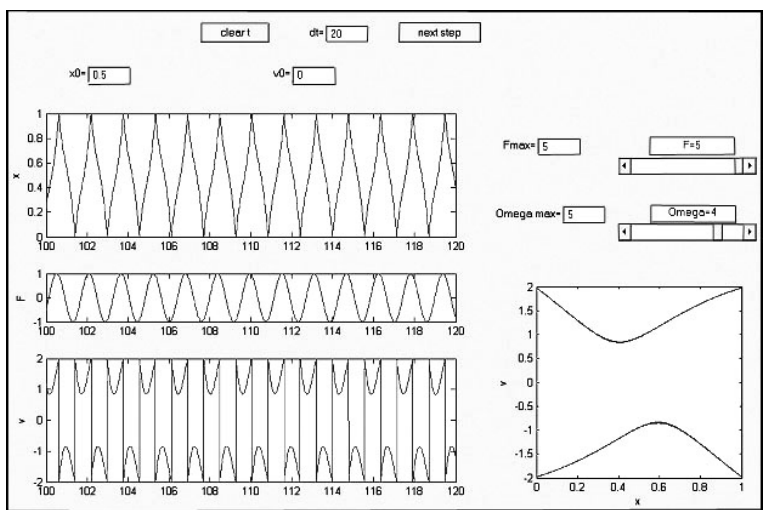


Рис. 6

нок. За период частица сталкивается с каждой из стенок один раз.

Дальнейшее уменьшение частоты приводит к тому, что решение, оставаясь периодическим, становится несимметричным. Происходит так называемое спонтанное нарушение симметрии. При этом в процессе перехода к этому решению система на некотором интервале частот может вернуться к решению без столкновений (рис. 5). Форма несимметричного решения может изменяться, в частности, может возникнуть решение, при котором на периоде колебаний число столкновений частицы с одной стенкой не равно числу столкновений с другой (рис. 7). Заметим, что на рис. 7 период решения оказывается равным удвоенному периоду вынуждающей силы.

При дальнейшем уменьшении частоты решение становится хаотическим, периодический режим не устанавливается в течение сколь угодно длительного времени, если частоту оставлять неизменной. Далее при переходе к значению $\omega \approx 1,88$ происходит установление периодического решения, при котором частица на периоде дважды сталкивается со стенкой (рис. 8).

Затем при переходе ω через значение $\omega \approx 1,6$ решение снова становится хаотическим. На интервале $\omega \in (1,12, 1,24)$ снова устанавливается периодическое решение, при котором частица сталкивается со стенками трижды. При дальнейшем уменьшении вновь возникает хаотическое решение, за которым следует интервал $\omega \in (0,92, 0,96)$ периодического решения, при ко-

тором частица на периоде четырежды сталкивается с каждой из стенок (рис. 9). Далее режимы хаотического и упорядоченного движения повторяются.

Аналогичные качественные изменения решений возникают при плавном увеличении частоты. Смена «зон периодического решения» и «зон хаотического решения» происходит также при фиксированной частоте вынуждающей силы и плавном изменении ее амплитуды. Это один из характерных эффектов нелинейной динамики, который можно наблюдать при исследовании решений уравнения Дуффинга [5] или уравнения, описывающего движение ротатора во внешнем периодическом поле.

Одинаковые качественные особенности решений двух предлагаемых задач на самом деле не случайны. Рассмотрим задачу о движении частицы между стенками и масштабным преобразованием сделаем промежуток между стенками равным π . Изменим далее задачу следующим образом. Допустим, частица достигает правой границы. Будем считать, что частица не отражается, а движется дальше, но меняется на противоположный знак значение силы. Движение частицы в измененной задаче будет зеркально симметричным (относительно стенки) движению в исходной задаче. Аналогично будем рассматривать движение частицы при достижении других границ (x кратно π). В результате задача сводится к движению частицы вдоль оси x под действием силы вязкого трения и периодической по времени и пространству силы:

$$F(x, t) = f(x) \cos(\omega t),$$

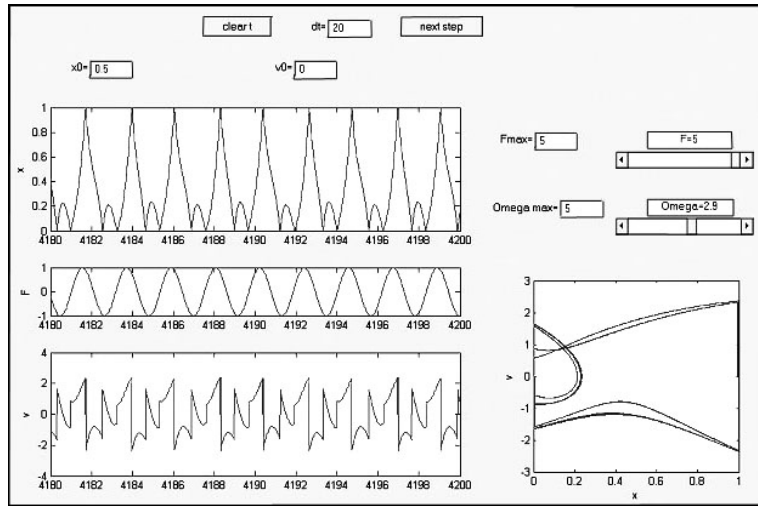


Рис. 7

где $f(x)$ – периодичная функция:

$$f(x) = \begin{cases} f_0, & x \in [2\pi n, (2n+1)\pi), \\ -f_0, & x \in [(2n-1)\pi, 2\pi n). \end{cases}$$

При такой модификации задачи движение частицы будет описываться уравнением (6), в котором константу F нужно просто заметить функцией $f(x)$. На самом деле мы получили движение частицы в поле продольной стоячей волны, которая по пространственной координате имеет вид, изображенный на рис. 10.

Эту функцию можно разложить в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = A_1 \sin(x) + A_2 \sin(2x) + \dots$$

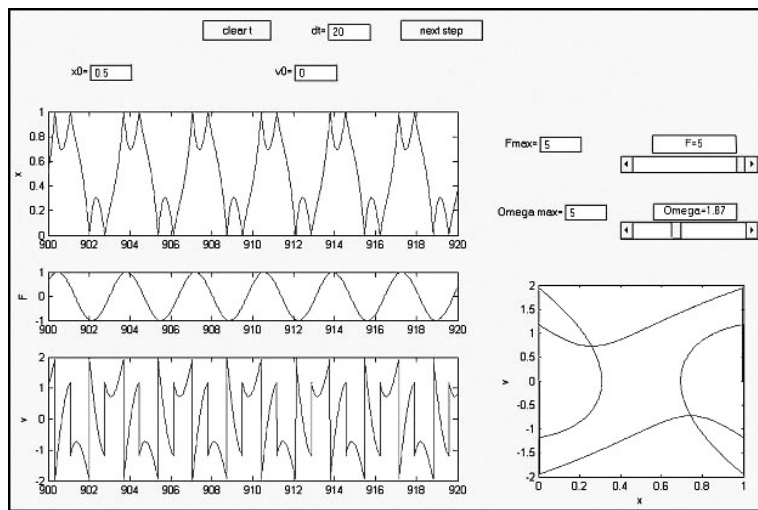


Рис. 8

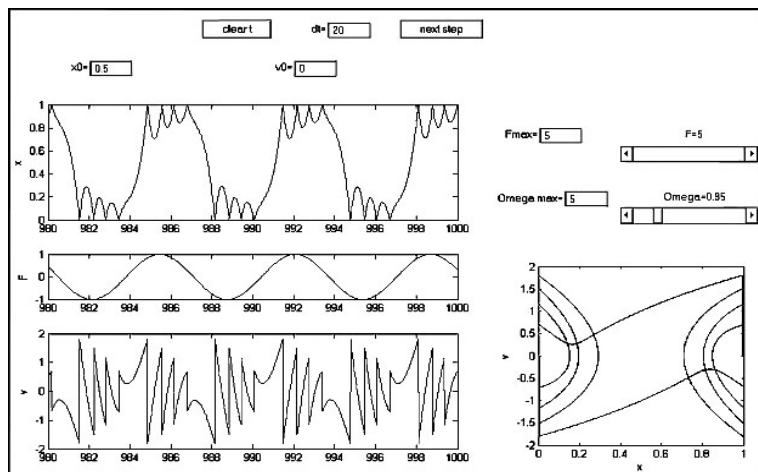


Рис. 9

Если мы ограничимся первым членом разложения, то получим с точностью до обозначений уравнение для ротатора:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = A_1 \sin x \cos(\omega t).$$

Проследивая аналогию между движением частицы между стенками и движением ротатора, несложно прийти к заключению, что случаи нечетного числа столкновений с каждой из стенок соответствуют вращению ротатора, а случаи четного числа столкновений – колебаниям ротатора. Из этой аналогии становится понятным чередование таких решений при изменении амплитуды и частоты внешнего воздействия.

Наконец, еще одно замечание, касающееся возможных точных решений. Графики координаты и скорости в зависимости от времени, изображенные на рис. 6, наводят на мысль о существовании решения такого, что за время, равное π/ω , модуль координаты изменяется на 1, а ско-

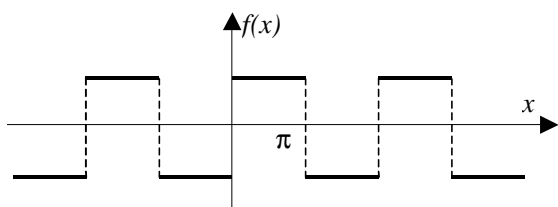


Рис. 10

рость при достижении противоположной стенки остается неизменной. Таким образом, можно попытаться найти решение, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} x(t_0 + \pi / \omega) - x(t_0) &= 1, \\ \dot{x}(t_0 + \pi / \omega) &= \dot{x}(t_0). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя выражение (8) и полученное из него дифференцированием выражение для скорости в зависимости от времени, после достаточно громоздких, но принципиально не

сложных преобразований можно получить равенство, при выполнении которого удовлетворяются условия (11):

$$\frac{2F}{\omega} \sin(t_0) = -1. \quad (12)$$

Таким образом, задача имеет абсолютно точное решение, справедливое при любых значениях параметров ω и F при условии $\omega < 2F$. Однако, как бы точно Вы не проводили вычислительный эксперимент, при превышении F некоторого значения периодическое решение пропадает. Это происходит потому, что периодическое решение становится неустойчивым. Малейшее отклонение начального значения момента времени для очередного отрезка времени (значение t_0 в формуле (12)) приводит к тому, что решение «уходит» от периодического. Исследование реальных нелинейных систем показывает, что подобное свойство является характерным для них и реализуется на опыте (см., например, [10, 12]). Идеальное же точное решение в данном случае аналогично точному решению, при котором карандаш стоит на острие и которое не реализуется на опыте. Решение, полученное вычислительными методами, оказывается более реальным, чем точное решение.

Литература

1. Самарский А.А. Математическое моделирование – новая методология научных исследований: Уч. пособие. М., 1990.
2. Физические основы математического моделирования: Учеб. Пособие для вузов / Г. А. Бордовский, А. С. Кондратьев, А. Д. Р. Чоудери. М.: Издательский центр «Академия», 2005. 320 с.
3. Самарский А.А. Что такое вычислительный эксперимент // Наука и жизнь, 1979. № 2. С. 27–33.
4. Глазков В.В. Компьютерное моделирование. Саранск, 2004.
5. Кондратьев А.С., Ляцев А.В. Компьютерное моделирование при изучении физики. Вынужденные колебания нелинейного осциллятора // Компьютерные инструменты в образовании, 2005. № 2. С. 66–71.
6. Кондратьев А.С., Ляцев А.В. Компьютерное моделирование реальных процессов при изучении физики. Как оптимально обогреть дачу // Компьютерные инструменты в образовании, 2005. № 5. С. 21–27.
7. Кондратьев А.С., Ляцев А.В., Е.В.Ситнова. Компьютерное моделирование при изучении физики. Проверка корректности вычислений // Компьютерные инструменты в образовании, 2006. № 2. С. 52–57.
8. Кондратьев А.С., Ляцев А.В. Математическое моделирование: аналитические и вычислительные методы // Компьютерные инструменты в образовании, 2007. № 5. С. 20–24.
9. Кондратьев А.С., Ляцев А.В. Физика. Задачи на компьютере. М.: Физматлит, 2008.
10. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.:Издательство ЛКИ, 2007.
11. Кондратьев А.С., Ляцев А.В. Динамический хаос в динамических и оптических системах // Известия Российского государственного университета им. А.И. Герцена. Естественные и точные науки, 2006. № 6 (15). С. 262–273.
12. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.

Abstract

The relationship between analytical and computational methods of investigation of mathematical models of nonlinear dynamics is discussed.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear dynamics, hierarchy of models, computational experiment.

*Кондратьев Александр Сергеевич,
академик РАО, доктор физико-
математических наук, профессор
кафедры методики обучения физике
РГПУ им. А.И. Герцена,
kondr6125@mail.ru,*

*Ляцев Александр Викторович,
доктор физико-математических
наук, профессор, заведующий
кафедрой методики обучения
физике РГПУ им. А.И. Герцена,
urp_eno@mail.ru*



Наши авторы, 2010.
Our authors, 2010.